Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 21, 18/11 - Versión preliminar

1 Landesman, Lazer, Leach: ¿quién ha dispersado aquel trío?

En la clase previa probamos un teorema de continuación para el problema periódico, que vuelve, noche a noche, como un canto:

Teorema 1.1 *Sea f continua y T-periódica en t y sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(u) := \int_0^T f(t, u, 0)\, dt$. Supongamos que existe un abierto acotado $\Omega \subset C_T^1$ tal que*

1. $u''(t) \neq \lambda f(t, u(t), u'(t))$ *para* $u \in \partial\Omega$ *y* $\lambda \in (0, 1)$.
2. $\phi(u) \neq 0$ *para* $u \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$.
3. $\deg_B(\phi, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0) \neq 0$.

Entonces el problema $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$ tiene al menos una solución $u \in \overline{\Omega}$.

Veremos ahora una aplicación concreta, porque la potencia del método no deja de resultar sorprendente. Por ejemplo, el caso elemental de las condiciones de Landesman-Lazer para el problema

$$u''(t) + g(u(t)) = p(t)$$

con g acotada y $p \in C_T$. El tiempo viejo otra vez vendrá: allá por la clase 5 mencionamos que si g tiene límites en $\pm\infty$ tales que

$$g(-\infty) < \overline{p} < g(+\infty)$$

o bien

$$g(+\infty) < \overline{p} < g(-\infty)$$

entonces el problema tiene al menos una solución T-periódica. En realidad, dijimos también que en el segundo caso no hace falta pedir que g sea acotada y, en rigor, tampoco hace falta que existan los límites; todos estos detalles quedarán después como ejercicio. Pero ahora veamos cómo se traducen las condiciones del teorema de continuación: como la no-linealidad no depende de u', tenemos que encontrar un abierto acotado $\Omega \subset C_T$ tal que

$$u''(t) \neq \lambda[p(t) - g(u(t))] \tag{1}$$

para $u \in \partial\Omega$ y $\lambda \in (0,1)$ y además ver qué pasa con la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que en este caso se define como

$$\phi(u) = \frac{1}{T}\int_0^T [p(t) - g(u)]\, dt = \overline{p} - g(u).$$

Es claro que las condiciones 2 y 3 del teorema se satisfacen para $\Omega = B_R(0)$ con $R \gg 0$, ya que bajo cualquiera de las hipótesis de Landesman-Lazer la función $\overline{p} - g$ cambia de signo en $[-R, R]$. Luego, alcanza con encontrar cotas a priori para la ecuación (1) para $\lambda \in (0,1)$. Pero esto es más fácil de lo que podrían pensar aquellos que tienen perdida la fe: si u es solución en primer lugar observamos que

$$\|u''\|_\infty \leq \|p\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

de donde se deduce que $\|u'\|_\infty \leq M$ y luego, integrando u' a partir de cualquier t_0, vale

$$\|u - u(t_0)\|_\infty < r$$

para cierta constante r. Ahora integramos la ecuación para obtener

$$0 = \lambda \int_0^T [p(t) - g(u(t))]\, dt,$$

es decir

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(u(t))\, dt = \overline{p}.$$

Por el teorema de valor medio, existe t_0 tal que $g(u(t_0)) = \overline{p}$ y como vale $g(\pm\infty) \neq p$, se deduce que existe R_0 tal que $|u(t_0)| \leq R_0$. En definitiva, tomando $R = R_0 + r$ se cumplen todas las condiciones del teorema de continuación y el mundo continúa andando.

Observación 1.2 *Las dos posibles situaciones de L-L son bien distintas; como mencionamos, en el segundo caso no hace falta pedir que g sea acotada. Cabe observar que el grado del operador $F = I - K$, que coincide con el de $-\phi$, es -1 en el primer caso y 1 en el segundo. Esto tiene una explicación geométrica si se piensa en la funcional asociada*

$$I(u) = \int_0^T \left[\frac{u'(t)^2}{2} - G(u(t)) + p(t)u(t)\right] dt.$$

En el segundo caso, el "fácil", la funcional resulta coerciva y se prueba que alcanza un mínimo; en el segundo caso también se puede probar que hay solución, pero que corresponde a un punto silla.

Observación 1.3 *El lector especializado en la clase 5 recordará que, en las notas de un Poincaré-Miranda dulzón, probamos en realidad una versión más general que corresponde a un resultado de Lazer un poco anterior: si g es acotada y existe R tal que*

$$g(u) > \overline{p} > g(-u) \qquad u \geq R$$

o bien

$$g(-u) > \overline{p} > g(u) \qquad u \geq R$$

entonces el problema tiene solución. Esto se puede ver ahora bajo la perspectiva del anterior teorema de continuación, tarea que dejamos para el lector. Pero vamos mirando atrás y al comprobar, observamos que la cuenta que hicimos con Poincaré-Miranda funciona también cuando las anteriores desigualdades no son estrictas, pero no cuando intentamos resolverlo por el método de continuación, que requiere probar que la homotopía no se anula sobre el borde. Sin embargo, hay una manera aceptable de salir del embrollo (o mejor, como suele decirse para homenajear a dos músicos de fuste, para que "salgan del lío"): por ejemplo, si vale la primera de las dos condiciones (no estricta), entonces podemos definir

$$g_n(u) := g(u) + \frac{1}{n}\arctan u.$$

¿Cuál es el plan? Como se ve, esta función sigue siendo acotada y además satisface la condición de Lazer de manera estricta, así que el teorema de continuación proporciona al menos una solución $u_n \in C^2_T$. *Pero además* $\|u_n''\|_\infty \leq \|p\|_\infty + \|g\|_\infty + \frac{\pi}{2}$ *y, como antes, se verifica que* $g_n(u_n(t_n)) = \overline{p}$ *para cierto* t_n, *lo que prueba que* $|u_n(t_n))| \leq R$. *En definitiva,* $\{u_n\}$ *es acotada para la norma de* C^2_T *y entonces existe una subsucesión que converge en* C^1_T *a cierta* u. *Es fácil probar ahora que esta dichosa* u *es solución del problema original. El lector con ganas de encontrar muchas soluciones, puede analizar la siguiente generalización, similar a alguna situación que ya hemos visto anteriormente. Supongamos que* g *es acotada y observemos otra vez que una posible solución* u *satisface*

$$\|u''\|_\infty \leq \|p\|_\infty + \|g\|_\infty$$

y luego

$$\|u(t) - u(t_0)\|_\infty \leq r$$

para cierto r *independiente de* u *y cualquier* t_0. *Entonces la existencia de soluciones queda garantizada si existen intervalos disjuntos* I, J *de longitud* $2r$ *tales que*

$$g(u) \geq \overline{p} \quad \forall\, u \in I, \qquad g(u) \leq \overline{p} \quad \forall\, u \in J.$$

Pero la situación que se plantea en el teorema de Landesman-Lazer es mucho más general. Para entenderlo, recordemos que la resonancia se produce en el caso anterior porque el operador $Lu = u''$ no es inversible, lo que significa que 0 es autovalor. Como vimos, para el problema $-u'' = \lambda u$ con condiciones periódicas, se tiene precisamente que $\lambda_1 = 0$. Para el caso de Dirichlet, una situación análoga se daría por ejemplo en el problema

$$u''(t) + u(t) + g(u(t)) = p(t), \qquad u(0) = u(\pi) = 0,$$

ya que $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = 1$.

El planteo es exactamente el mismo que antes, solo que ahora consideramos $L : D \subset X \to C[0,\pi]$ dado por $Lu := u'' + u$, donde

$$X = \{u \in C[0,\pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

$$D = C^2[0,T] \cap X$$

y

$$\ker(L) = \mathrm{gen}\{\operatorname{sen} t\}.$$

En este caso, el operador no lineal es el mismo que antes, solo que en otros espacios: ahora $N(u) = p - g(u)$ debe pensarse como $N : X \to C[0,\pi]$.

Todo lo que alguna vez dijimos sobre simetrías (y leves anacronismos, diría Borges, pensando quizá en el problema con delay) nos hace pensar que entonces la imagen de L debería ser el subespacio ortogonal en el sentido de L^2:

$$\mathrm{Im}(L) = \left\{\varphi \in C[0,\pi] : \int_0^\pi \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt = 0\right\}.$$

Esto se puede verificar fácilmente haciendo la cuenta, como ya vimos, por variación de parámetros. Y la misma cuenta sirve también para convencerse a mano de que L tiene una inversa a derecha compacta que consiste en elegir, para cada φ ortogonal a la función $\operatorname{sen} t$ la única solución u del problema $Lu = \varphi$ que también resulta ortogonal a dicha función. Claro que ahora el truquito de integrar de los dos lados para obtener cotas no funciona, pequeño fracaso que nos lleva a entender lo que realmente estábamos haciendo antes, cuando integrábamos con total frescura: en realidad estábamos proyectando, no en el sentido freudiano (o tal vez sí, quién sabe) sino con la mira puesta en el núcleo de L. En efecto, la igualdad

$$u''(t) + u(t) + g(u(t)) = p(t)$$

para u que se anula en el borde nos dice que

$$\int_0^\pi [u''(t) + u(t) + g(u(t))] \operatorname{sen} t\, dt = \int_0^\pi p(t) \operatorname{sen} t\, dt$$

y en consecuencia

$$\int_0^\pi g(u(t)) \operatorname{sen} t\, dt = \int_0^\pi p(t) \operatorname{sen} t\, dt.$$

El lector que haya quedado boquiabierto con el último paso puede recurrir siempre a una eficaz integración por partes para ver que hemos tachado los términos que correspondía tachar; sin embargo, esto no debería hacer falta si uno se aviva de un hecho más bien trivial: si $u \in X$, entonces $Lu = u'' + u$ pertenece a la imagen de L. Seguramente fueron observaciones de este tipo las que llevaron a Discépolo a escribir el tango que dice: ¡Fui un gil!

Pero volviendo a las proyecciones conviene normalizar (esta vez, definitivamente: no en el sentido freudiano pero sí en el de L^2) nuestra base de $\ker(L)$. Entonces, como $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$, definimos $\psi_1(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} t$; De esta forma, se define el proyector $P : X \to X$ dado por $Pu := a(u)\psi_1$, con

$$a(u) := \int_0^\pi u(t)\psi_1(t)\, dt.$$

Todos conocen las reglas de un buen proyector: es una aplicación lineal y continua tal que $P^2 = P$, lo que implica de manera inmediata que el espacio se puede escribir como una suma directa: $X = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$. Pero esta proyección es ortogonal, así que $\ker(P)$ es precisamente el destino elegido para nuestro operador K. Esta maquinaria nos permite escribir el problema $Lu = N(u)$ en la forma equivalente

$$N(u) \in \operatorname{Im}(L), \qquad u = Pu + KN(u)$$

donde, al igual que antes, las dos condiciones deben ir juntas, porque la primera es indispensable para que la segunda tenga gollete. Claro que pertenecer a la imagen de L es lo mismo que ser ortogonal a ψ_1, cosa que ya sabemos expresar muy bien en términos de proyecciones. El detalle es que el espacio de partida no es el mismo que el de llegada; por eso, para ser prolijos conviene definir otra proyección $Q : C[0, \pi] \to C[0, \pi]$ que en realidad es la misma de antes, es decir: $Qu := a(u)\psi_1$. Entonces la descomposición de Lyapunov-Schmidt queda escrita de la siguiente forma:

$$QN(u) = 0, \qquad u = Pu + K[N(u) - QN(u)].$$

Como antes, esto se reduce a una sola ecuación, agregando el término (nulo) $QN(u)$ a la segunda igualdad. Y quizás nos pasemos de prolijos, pero cabe observar una vez más que en realidad $QN(u)$ y u viven en espacios distintos, cosa que se arregla fácilmente: alcanza con definir $J : \operatorname{Im}(Q) \to \ker(L)$ como el isomorfismo dado por $J\psi_1 := \psi_1$. ¡Vaya tontería! En este caso J es -forzando un poco el lenguaje- la identidad, y nadie nos hubiera acusado si escribíamos directamente $Q = P$; sin embargo, haber hecho las cosas (por una vez) con prolijidad nos deja preparado el terreno para casos más generales, donde los operadores no son simétricos ni los espacios tan plácidos. En resumen, nuestro problema quedó convertido en este otro:

$$u = Pu + JQN(u) + K[N(u) - QN(u)]$$

Ahora es cuestión de agregar un λ en el lugar apropiado y en un cerrar y abrir de ojos[1] tenemos un nuevo teorema de continuación que, para usos futuros, podemos formular en términos abstractos:

Teorema 1.4 *En el contexto anterior, supongamos que existe un abierto acotado $\Omega \subset X$ tal que*

1. $Lu \neq \lambda N(u)$ *para* $u \in \partial\Omega$ *y* $\lambda \in (0,1)$.
2. $QN(u) \neq 0$ *para* $u \in \partial\Omega \cap \ker(L)$.
3. $\deg_B(JQN, \Omega \cap \ker(L), 0) \neq 0$.

Entonces el problema $Lu = N(u)$ *tiene al menos una solución* $u \in \overline{\Omega} \cap D$.

Intentemos ahora evitar que tanta abstracción nos impida ver el bosque: para ello, observemos que la primera condición dice simplemente que el problema

$$u''(t) + u(t) = \lambda[p(t) - g(u(t))]$$

no tiene soluciones para $\lambda \in (0,1)$ y $u \in \partial\Omega$, mientras que la segunda y la tercera se pueden escribir mucho mejor si identificamos gen$\{\psi_1\}$ lisa y llanamente con $\mathbb{R}$, es decir, $s \mapsto u := s\psi$. En ese caso, JQN se identifica con la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(s) := a(N(u)) = \int_0^\pi [p(t) - g(s\psi_1(t))]\psi_1(t)\, dt.$$

¿Cómo se verán las condiciones de Landesman-Lazer en este caso? La cuenta, en esencia, es similar a la de antes, cuando vimos en primer lugar que había cotas para $u - \overline{u}$ y con eso obtuvimos cotas para $\overline{u}$. En este caso, adivinemos: lo primero que vamos a hacer es acotar $u - Pu$. Y resulta sumamente gratificante verificar que muchas de las cuentas que venimos haciendo desde la primera clase no eran meros caprichos de tal o cual ecuación sino que obedecían a una suerte de plan mayor. En particular, la que dice que existe una constante c tal que

$$\|u - Pu\|_{C^2} \leq c\|Lu\|_\infty$$

para toda $u \in X$. Esto se puede probar fácilmente a mano, pero en realidad tiene una explicación más de fondo: el operador $K : \mathrm{Im}(L) \to \ker(P)$ es compacto si miramos el codominio con la norma de X, pero $K : \mathrm{Im}(L) \to \ker(P) \cap C^2[0,\pi]$ es un isomorfismo con la norma de C^2. Esto traduce la desigualdad

$$\|K\varphi\|_{C^2} \leq c\|\varphi\|_\infty$$

válida para toda $\varphi \in \mathrm{Im}(L)$ en

$$\|u\|_{C^2} \leq c\|Lu\|_\infty$$

[1] El lector disculpará la pequeña licencia literaria de escribir esta expresión en el orden inverso al habitual, que no obedece sino a la firme convicción de que un buen parpadeo debe comenzar con los ojos abiertos.

para toda $u \in \ker(P) \cap C^2[0,\pi]$. En definitiva, si $u \in X$ satisface

$$u''(t) + u(t) = \lambda[p(t) - g(u(t))]$$

para cierto $\lambda \in (0,1)$, se deduce que $\|u - Pu\|_{C^2} \leq c(\|p\|_\infty + \|g\|_\infty) := r$ y además

$$\int_0^\pi g(u(t))\psi_1(t)\, dt = \int_0^\pi p(t)\psi_1(t)\, dt.$$

Esta última igualdad es la que nos va a decir que la norma de Pu no puede ser muy grande. En efecto, si escribirmos $Pu(t) = a\psi_1(t)$, entonces

$$\int_0^\pi g(u(t))\psi_1(t)\, dt = \int_0^\pi g(a\psi_1(t) + A(t))\psi_1(t)\, dt,$$

donde $A = u - Pu$ que, como sabemos, está acotado. Pero fíjense qué buena suerte: resulta que $\psi(t) > 0$ para $t \in (0,\pi)$, de modo que si $a \gg 0$ vale

$$\int_0^\pi g(a\psi_1(t) + A(t))\psi_1(t)\, dt \simeq g(+\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt.$$

¿Se anima, estimado lector, a justificar formalmente esta afirmación? En tal caso, no tendrá problema en aceptar también esta otra, para $a \ll 0$:

$$\int_0^\pi g(a\psi_1(t) + A(t))\psi_1(t)\, dt \simeq g(-\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt.$$

Esto permite sospechar que una buena condición va a ser pedir que estas cantidades no coincidan con $\int_0^T p(t)\psi_1(t)\, dt$. Pero además queremos que el grado de ϕ sea distinto de 0, para lo cual observemos que

$$\phi(s) = \int_0^\pi p(t)\psi_1(t)\, dt - \int_0^\pi g(s\psi_1(t))\psi_1(t)\, dt$$

de donde

$$\lim_{s\to\pm\infty} \psi(s) = \int_0^\pi p(t)\psi_1(t)\, dt - g(\pm\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt.$$

En resumen, las condiciones de Landesman-Lazer correspondientes a este problema son

$$g(-\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt < \int_0^\pi p(t)\psi_1(t)\, dt < g(+\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt$$

o bien

$$g(+\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt < \int_0^\pi p(t)\psi_1(t)\, dt < g(-\infty) \int_0^\pi \psi_1(t)\, dt.$$

Por supuesto, si uno tiene ganas puede ahora recordar quién era ψ_1, lo que permite escribir las condiciones de manera más bonita:

$$2g(-\infty) < \int_0^\pi p(t) \operatorname{sen} t\, dt < 2g(+\infty)$$

o bien

$$2g(+\infty) < \int_0^\pi p(t)\,\mathrm{sen}\,t\,dt < 2g(-\infty).$$

Llegado este punto, tal vez alguien pueda preguntarse: por qué usamos la notación ψ_1 y no ψ? La respuesta es muy sencilla: porque estábamos lidiando con la autofunción correspondiente al primer autovalor $\lambda_1 = 1$. Pero lo mismo se puede hacer para $\lambda_n = n^2$, que también es simple y la autofunción correspondiente es $\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}(nt)$. El planteo es el mismo, pero se pone más divertido porque, a diferencia de ψ_1, las restantes autofunciones cambian de signo. ¿Cómo quedarán las condiciones L-L en este caso? Y para el problema periódico, es más divertido aún ya que para $n > 1$ no solamente ocurre que las autofunciones cambian de signo, sino también que los autovalores no son simples, lo que arma un despelote considerable. Las condiciones correspondientes ya no se llaman L-L sino L-L: sale un Landesman y entra un Leach. El resultado de Lazer y Leach [2] es un poco anterior al de Landesman y Lazer [1]; se puede obtener una demostración usando el operador de Poincaré (ver ejercicio 5 de la práctica 1, segunda parte). Y también, por supuesto, usando teoría de grado, cosa que nos tendrá entretenidos durante la próxima clase.

References

[1] Landesman-Lazer (1970)

[2] Lazer-Leach (1969)